

# HEURÍSTICA EFICIENTE PARA O PASSEIO ABERTO DO CAVALO A PARTIR DE CASAS ARBITRÁRIAS EM TABULEIROS QUADRADOS

**Vitor Silva Costa**

Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68530 – CEP 21941-590 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil  
v2costa@gmail.com

**Vinícius Gusmão Pereira de Sá**

Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68530 – CEP 21941-590 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil  
vigusmao@dcc.ufrj.br

## RESUMO

Não se conhece algoritmo exato eficiente para o célebre problema do passeio aberto do cavalo em tabuleiros de xadrez. A heurística proposta recentemente por Álvarez-Martínez e Lázaro (em “*Algoritmo determinístico para resolver el problema del tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez  $n \times n$* ”, SBPO 2012) apresenta bons resultados. Entretanto, há contra-exemplos de diversos tamanhos para a afirmação de que ela seria capaz de encontrar solução a partir de todas as possíveis casas iniciais. Além disso, ela não lida bem com as simetrias naturais do problema, podendo encontrar resultados divergentes partindo de casas iniciais absolutamente simétricas. A partir de um refinamento baseado nos octantes do tabuleiro, apresentamos uma heurística que, além de preservar simetria, logrou êxito em todos os testes realizados (tabuleiros  $n \times n$ , para  $5 \leq n \leq 430$ , a partir de todas as possíveis casas iniciais). Ademais, a heurística proposta se mostra extensível a tabuleiros retangulares e multidimensionais.

**PALAVRAS CHAVE.** Passeio aberto do cavalo, caminho hamiltoniano.

**Área principal:** TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos.

## ABSTRACT

No efficient exact algorithms are known for the famous open knight’s tour problem over a chessboard. The heuristic method proposed recently by Álvarez-Martínez and Lázaro (in “*Algoritmo determinístico para resolver el problema del tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez  $n \times n$* ”, SBPO 2012) presents good results. However, there are counterexamples of various sizes for its alleged ability to find a solution starting from every possible initial position. Besides that, it does not cope well with the natural symmetries of the problem, at times producing diverging results for absolutely symmetrical initial squares. A refinement based upon the octants of the chessboard gave rise to a symmetry-preserving method that was successful in  $n \times n$  chessboards, for  $5 \leq n \leq 430$ , starting from all possible initial squares. Moreover, the proposed method is probably extensible to rectangular and multidimensional boards.

**KEYWORDS.** Open knight’s tour, Hamiltonian path.

**Main area:** TAG – Theory and Algorithms in Graphs.

## 1. Introdução

Um *passeio do cavalo* é uma sequência formada pelas casas de um tabuleiro de xadrez onde cada casa aparece exatamente uma vez, e em que duas casas consecutivas, na sequência, estão afastadas uma da outra, no tabuleiro, duas unidades em uma dimensão e uma unidade na outra dimensão. Em outras palavras, trata-se de um percurso que poderia fazer o cavalo do jogo de xadrez, com seu movimento típico em forma de L, passando por todas as casas do tabuleiro, sem jamais passar duas vezes pela mesma casa. Mais formalmente, o problema de se decidir a existência de um passeio do cavalo é caso particular do problema do caminho hamiltoniano — que é NP-completo para grafos gerais — em um grafo cujos vértices são as casas do tabuleiro, e cujas arestas ligam casas separadas por um movimento válido do cavalo.

Leonhard Euler foi um dos primeiros — e certamente o mais proeminente — estudiosos a investigar o problema do passeio do cavalo (Euler, 1759). Diversas variantes do problema foram consideradas desde então. Na versão *fechada*, exige-se que a primeira e a última casa do passeio também estejam separadas por um movimento do cavalo, isto é, que o cavalo consiga retornar a sua casa inicial em um único movimento após visitar todas as demais casas do tabuleiro. Na versão aberta, inexistente tal exigência. Embora a formulação inicial do problema tenha provavelmente empregado um tabuleiro de xadrez tradicional, de tamanho  $8 \times 8$ , há muito que outros tipos de tabuleiro foram considerados: tabuleiros  $n \times n$  (íntegros ou com casas removidas) para valores arbitrários de  $n$  (Parberry, 1997), retangulares  $n \times m$  (Cull and DeCurtins, 1978), tabuleiros tridimensionais e multidimensionais (Erde et al., 2012; Kumar, 2012), tabuleiros imersos em superfícies esféricas (Cairns, 2002), tóricas (Watkins, 1997) etc.

Não se conhece algoritmo exato eficiente para o problema de se determinar a existência de um passeio aberto do cavalo em tabuleiros  $n \times n$ . A versão para passeios fechados foi resolvida em (Schwenk, 1991) não apenas para tabuleiros quadrados, mas para todos os tabuleiros retangulares. Em seu artigo, Schwenk caracteriza os tabuleiros que admitem tais passeios e delinea um método eficiente para encontrá-los. É evidente que, se certo tabuleiro admite passeio fechado, então o mesmo tabuleiro admite passeio aberto a partir de todas as possíveis casas iniciais, de forma que o resultado de Schwenk pode ser aplicado nesses casos. Contudo, para a imensa quantidade de tabuleiros que não o admitem, não se sabe determinar de forma exata se é possível ao cavalo descrever um passeio aberto a partir de uma casa inicial dada.

Estamos interessados no problema do passeio aberto em tabuleiros quadrados  $n \times n$  a partir de uma casa inicial arbitrária. Quando  $n$  é par, é possível, a princípio, obter passeios abertos a partir de qualquer casa do tabuleiro. Quando  $n$  é ímpar, no entanto, são impossíveis passeios originados de casas pretas, isto é, de casas que não tenham a mesma cor dos cantos do tabuleiro.<sup>1</sup> A razão para a impossibilidade de haver passeios originados de casas pretas está na alternância de cores ao longo de qualquer passeio e no fato de o número de casas brancas ser uma unidade maior do que o número de casas pretas em tabuleiros de tamanho ímpar. Quando, ao longo do texto, escrevermos casas iniciais

---

<sup>1</sup>Por convenção, casas brancas são aquelas cujas coordenadas somadas resultam em um número par quando se utiliza qualquer sistema de coordenadas em que a origem corresponda a uma das casas situadas nos cantos do tabuleiro. Neste trabalho, identificamos as casas por pares  $(i, j)$ ,  $0 \leq i, j \leq n - 1$ , sendo a primeira coordenada referente às colunas (fileiras verticais de casas), e a segunda referente às linhas (fileiras horizontais). A casa  $(0, 0)$  correspondente ao canto superior esquerdo do tabuleiro.

possíveis, estaremos nos referindo a todas as casas do tabuleiro, caso  $n$  seja par, e a todas as casas brancas do tabuleiro, caso  $n$  seja ímpar.

Existe na literatura uma boa quantidade de heurísticas e algoritmos para o problema do passeio aberto do cavalo em tabuleiros  $n \times n$ . Cada um dos quais apresenta, no entanto, características não muito desejáveis. A maioria só funciona a partir de uma única casa inicial (em geral, um dos cantos do tabuleiro), um bom número deles baseia-se em divisão-e-conquista utilizando numerosos casos-base que precisam ser recomputados para cada possível casa inicial considerada (o que os torna custosos para casas iniciais arbitrárias), e muitos simplesmente falham para valores particulares de  $n$ . Em (Ganzfried, 2004), por exemplo, em que foram testados tabuleiros  $n \times n$  com  $5 \leq n \leq 610$ , surgiram problemas para  $n \in \{7, 8, 9, 74, 113, 428\}$ . O mesmo valor patológico  $n = 428$  também levou a heurística de (Roth, 1993) a falhar.

Em (Álvarez-Martínez and Lázaro, 2012), os autores apresentam uma heurística bastante eficaz. Ela é, na verdade, um refinamento da chamada *regra de Warnsdorff*, preconizada pelo próprio (Warnsdorff, 1823), e que já havia sido empregada em outras heurísticas com algum sucesso, mas sempre apresentando alguns casos de falha, mesmo em tabuleiros de tamanho modesto. Em (Squirrel and Cull, 2006), há uma prova (incompleta, segundo (Álvarez-Martínez and Lázaro, 2012)) de que sua heurística funcionaria sempre para  $n \geq 112$ , e a heurística de (Pohl, 1967) também falha para algumas instâncias. A heurística de Álvarez-Martínez e Lázaro (que abreviaremos AML), por outro lado, teria sido alegadamente capaz de obter passeios abertos para o cavalo em tabuleiros  $n \times n$ , para  $5 \leq n \leq 2000$ , a partir de todas as casas iniciais possíveis. Embora valorosa em sua idéia central, a heurística AML possui alguns problemas. Primeiramente, nossa implementação não conseguiu reproduzir a taxa de sucesso reportada por seus autores.<sup>2</sup> De fato, a heurística falha em muitos casos, como pode ser comprovado *sem* o auxílio do computador para valores pequenos de  $n$ . A bem da verdade, para quase todos os valores de  $n$ , há casas iniciais para as quais nenhum passeio aberto é por ela obtido. Ainda assim, a taxa de sucesso da heurística permanece muito boa. Um segundo problema, porém, é o fato de que tal heurística lida de maneira questionável com as simetrias naturais de um tabuleiro  $n \times n$ , uma vez que ela por vezes encontra passeio aberto a partir de certa casa inicial, mas encontra passeio distinto (não-simétrico ao primeiro) — ou mesmo falha em encontrar qualquer passeio aberto — a partir de uma casa inicial que é absolutamente simétrica àquela.

Na Seção 2, revisitamos a heurística AML, apontando o que acreditamos ser fraquezas suas e apresentando exemplos que as evidenciam. Na Seção 3, apresentamos um primeiro refinamento aplicado a um dos critérios da heurística AML, não apenas resolvendo a questão da perda de simetria, como também já permitindo a obtenção de resultados computacionais marginalmente superiores. A seguir, discutimos um segundo refinamento, que nos leva à formulação da heurística definitiva proposta pelo presente trabalho. Nossa heurística, também baseada na regra de Warnsdorff e em critérios determinísticos de desempate semelhante aos propostos por Álvarez-Martínez e Lázaro, é pois o desdobramento dos trabalhos desses autores.

Na Seção 4, passamos aos resultados computacionais obtidos, pelos quais é possível observar que a heurística proposta apresentou resultados incrivelmente satisfatórios,

---

<sup>2</sup>O *link* disponibilizado pelos autores para a sua implementação encontrava-se inoperante no momento da escrita deste artigo.

tendo encontrado passeio aberto em todos os testes realizados, testes estes que cobriram a totalidade das casas iniciais possíveis de tabuleiros  $n \times n$  para  $5 \leq n \leq 430$ . Nossos resultados reforçam a conjectura de (Dudeney, 1970) de que, para  $n \geq 5$ , todo tabuleiro quadrado admite passeio aberto iniciando em cada uma de suas casas iniciais possíveis. Finalmente, na Seção 5, fazemos nossas considerações finais.

## 2. A heurística AML

Resolver o problema do passeio do cavalo por força bruta — empregando por exemplo um algoritmo de *backtracking* para tentar, um a um, todos os possíveis movimentos a partir de cada uma das casas — é claramente impraticável para tabuleiros cujo tamanho não seja ínfimo. As heurísticas existentes, portanto, são em geral gulosas, no sentido de que tentam, a cada passo, escolher a próxima casa para o cavalo e para ela seguir sem jamais depois se arrepender. Agindo dessa forma, o tempo gasto por uma execução é linear no tamanho do tabuleiro, mas é possível que não se consiga obter o passeio desejado. Cada escolha da próxima casa a ser visitada é feita segundo uma avaliação das casas *candidatas*, isto é, casas do tabuleiro que ainda não tenham sido visitadas até o momento, e que possam ser atingidas por um movimento do cavalo a partir da casa atual. Essa avaliação se dá segundo certos critérios comparativos, e é o conjunto desses critérios que normalmente distingue uma heurística de outra.

A heurística AML é baseada numa hierarquia de quatro critérios. Se, pelo primeiro critério, uma das casas candidatas vence todas as demais, então ela será a escolhida. Se há empate, o próximo critério na hierarquia é invocado. Persistindo o empate, passa-se ao próximo critério, e assim por diante. Os critérios são:

- 1) regra de Warnsdorff;
- 2) proximidade a um dos cantos do tabuleiro;
- 3) proximidade a uma das bordas (paredes) do tabuleiro;
- 4) prioridade da casa candidata, dada por uma permutação que é definida em função da posição da candidata em relação à casa corrente e também em função da casa inicial do passeio.

A regra de Warnsdorff consiste em selecionar a casa candidata que minimiza o número de próximos movimentos possíveis. Em outras palavras, por este critério o cavalo deve se deslocar para a casa a partir da qual ele contará com a menor quantidade de casas candidatas para dar seu passo seguinte. Intuitivamente, a idéia é a de atacar primeiro as restrições mais severas, deixando para mais tarde as casas que poderão ser mais facilmente visitadas. Do contrário, imagina-se, as casas que ora já dispõem de poucas opções poderão facilmente se transformar em becos sem saída.

Os critérios de proximidade a um dos cantos ou a uma das bordas são auto-explicativos: vence a casa que estiver mais próxima a algum canto ou borda, o que intuitivamente significa levar o cavalo primeiro às casas mais confinadas, com menos opções de saída, acompanhando portanto a intuição do critério anterior.

Quanto ao último critério, não há exatamente uma justificativa intuitiva para ele. Trata-se sobretudo de um critério determinístico, cabal, que não dá margem a novos empates. Em linhas breves, faz-se passar pela posição atual do cavalo duas retas, uma vertical e uma horizontal, particionando o plano em quatro *quadrantes relativos*: o primeiro quadrante, a noroeste; o segundo quadrante, a nordeste; o terceiro quadrante, a sudeste; e o

quarto quadrante, a sudoeste. Da mesma forma, determina-se quatro *quadrantes absolutos* fazendo-se passar duas retas ortogonais pelo centro do tabuleiro e numerando-se as regiões do plano assim obtidas de forma análoga à anterior. O *quadrante inicial* é o quadrante absoluto que contém a primeira casa do passeio que se está construindo. A seguir, as posições atingíveis por movimentos do cavalo a partir da casa corrente (sejam elas casas candidatas ou não, estejam elas dentro do tabuleiro ou não) recebem *prioridades* de 1 a 8 distribuídas sequencialmente no sentido horário, de forma que a casa que recebe prioridade 1 seja uma das casas que estão no quadrante relativo com o mesmo número do quadrante inicial. Isto é, se o quadrante inicial é o primeiro quadrante absoluto, a posição que receberá prioridade 1 será uma daquelas que estão a noroeste da casa atual do cavalo; se o quadrante inicial é o segundo, receberá prioridade 1 uma das casas a nordeste do cavalo, e assim por diante.<sup>3</sup> As casas candidatas são assim priorizadas, e a escolhida para dar seguimento ao passeio será aquela de *menor* prioridade.

Há possivelmente dois problemas com o quarto critério da heurística AML. O primeiro é a perda de simetria que ele acarreta. O segundo é sua arbitrariedade.

**Perda de simetria.** O quarto critério da heurística AML implica com frequência construções assimétricas de passeios a partir de casas simétricas. De fato, a sequência de prioridades é descrita no sentido horário para todas as casas, independentemente do quadrante inicial. Os efeitos de se seguir uma ordenação horária quando o passeio iniciou de um quadrante par são nitidamente distintos do efeito de se seguir a mesma ordenação quando o passeio iniciou de um quadrante ímpar. Para que fossem mantidas as simetrias horizontal e vertical do tabuleiro, seria preciso utilizar uma numeração no sentido anti-horário em dois dos quadrantes (os ímpares, por exemplo). Além disso, há casas simétricas dentro de um mesmo quadrante, devido às simetrias estabelecidas pelas duas diagonais do tabuleiro. O critério de desempate para duas casas simétricas deveria observar essa simetria, invertendo, em um dos casos, o sentido de distribuição das prioridades. A Figura 1 ilustra duas execuções da heurística de Álvarez-Martínez e Lázaro para casas iniciais diagonalmente simétricas em um tabuleiro  $7 \times 7$ . Na figura da esquerda, vê-se que o passeio aberto foi encontrado (os números indicam a ordem de visita às casas); na da direita, o cavalo foi levado a um beco sem saída no centro do tabuleiro.

**Arbitrariedade.** As permutações de prioridades que são definidas pela regra do quarto critério não seguem nenhuma intuição, mas são apenas uma maneira arbitrária de se desempatar deterministicamente casas candidatas.

Os dois aspectos acima seriam pouco relevantes se a heurística AML tivesse obtido resultados incontestáveis, diante dos quais não se cogitassem melhorias. No entanto, apresentamos, na Seção 4, diversas instâncias (tamanho do tabuleiro, casa inicial) para as quais ela falha em obter passeio aberto. Uma delas é a da própria Figura 1(b), que pode ser verificada rapidamente.

Na próxima seção, formulamos melhorias para os pontos acima, conseguindo uma heurística que foi capaz de obter passeio aberto em 100% das mais de 2 milhões de instâncias testadas.

---

<sup>3</sup>O artigo de Álvarez-Martínez e Lázaro não especifica qual exatamente, dentre as duas casas de um quadrante, será aquela que receberá prioridade 1. Na verdade, isto é feito apenas para o caso em que o quadrante inicial é o segundo.

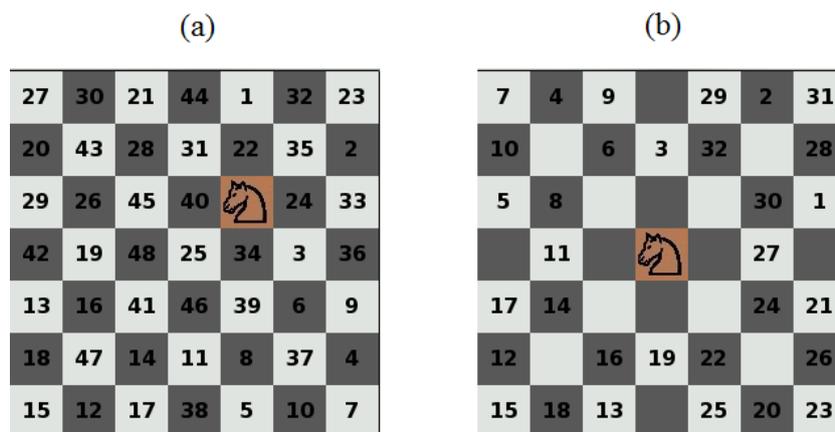


Figura 1. Heurística AML em tabuleiro  $7 \times 7$ . (a) Casa inicial:  $(4, 0)$ . (b) Casa inicial:  $(6, 2)$ .

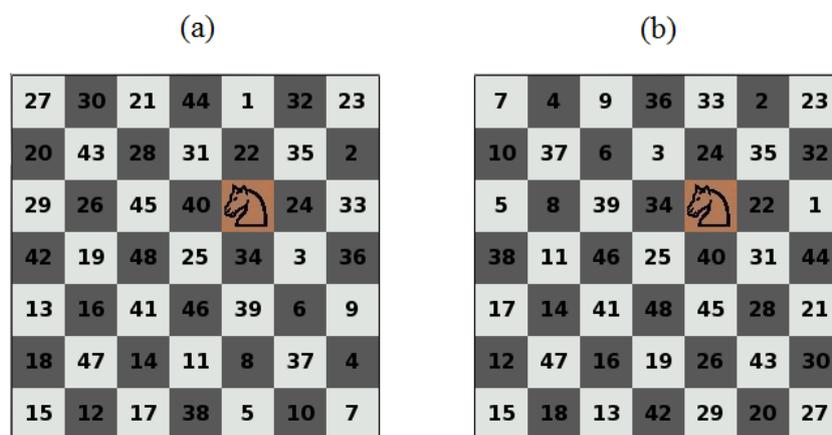
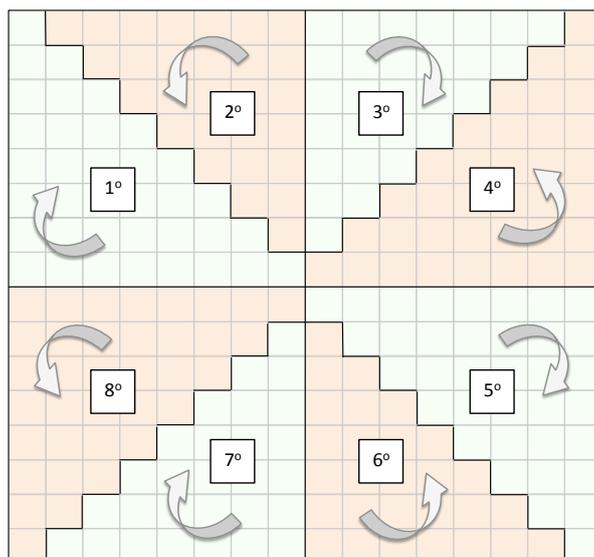


Figura 2. Heurística OctAML. (a) Casa inicial:  $(4, 0)$ . (b) Casa inicial:  $(6, 2)$ .

### 3. Nova heurística OctAML16

Um tabuleiro  $n \times n$  possui quatro eixos de simetria coincidindo com suas diagonais e as mediatrizes de seus lados. Para respeitar tais simetrias, identificamos os *octantes absolutos* do tabuleiro, que são as regiões delimitadas pelos eixos de simetria e pelos lados do tabuleiro, como ilustrado na Figura 3.

Um primeiro refinamento da heurística AML foi obtido, portanto, pela substituição de seu quarto critério por outro equivalente, mas que considera a ordenação das prioridades como sendo definida a partir do *octante inicial*, isto é, o octante absoluto que contém a casa de onde se iniciou o passeio. As 8 posições ao redor da casa corrente do cavalo situam-se, cada qual, em um dos *octantes relativos* definidos por retas imaginárias que se interesctam na casa corrente. Os octantes relativos são numerados de 1 a 8 (primeiro octante, segundo octante etc.) em sentido horário a partir do octante esquerdo/inferior do primeiro quadrante relativo (o quadrante a noroeste da casa atual do cavalo). A seguir, as prioridades das casas são distribuídas em sentido horário ou anti-horário de acordo com o octante inicial (veja sentido de rotação das setas na Figura 3), e de tal forma que a casa que receberá prioridade 1 será a que estiver situada no octante relativo cujo número corresponde ao número do octante inicial. As Figuras 4(a) e 4(b) ilustram as prioridades que são atribuídas às casas



**Figura 3. Octantes absolutos e os sentidos de rotação definidos por casas iniciais neles situadas.**

candidatas nas situações em que a casa inicial pertence, respectivamente, ao primeiro e ao sexto octante absoluto. Como na heurística AML, a casa candidata de menor prioridade é selecionada. Chamemos a heurística assim obtida de heurística OctAML.

Embora esta nova forma de se distribuir prioridades seja tão arbitrária quanto a da formulação original da heurística AML, os resultados obtidos foram (marginalmente) superiores, como será visto na Seção 4, trazendo adicionalmente a vantagem de sempre prover resultados absolutamente simétricos. A Figura 2 apresenta os resultados das execuções da heurística OctAML para as mesmas instâncias da Figura 1, podendo-se perceber a perfeita simetria dos passeios por ela obtidos (nesse caso, pode-se transformar um passeio no outro por meio de um espelhamento segundo um de seus eixos de simetria diagonal).

**Rotação e translação de prioridades.** O maior ganho, contudo, foi obtido quando — com o objetivo de diminuir o grau de arbitrariedade das permutações de prioridades impostas pelo quarto critério — optamos por empregar, um por vez, *todos* os 16 possíveis mapeamentos de prioridades que atribuem prioridades consecutivas, módulo 8, a posições que ocupam octantes relativos consecutivos. Em outras palavras, para um dado tabuleiro e uma dada casa inicial, a heurística consiste em se executar (no máximo) 16 vezes a heurística OctAML, tendo definido de antemão, para cada uma delas, (i) qual será a diferença entre as numerações do octante relativo que receberá prioridade 1 e do octante inicial (translação); e (ii) qual será o sentido de distribuição das prioridades (rotação). Se alguma dessas execuções encontrar um passeio aberto, este é exibido e o algoritmo para; do contrário, ao fim das 16 tentativas o algoritmo reporta que não encontrou passeio.

A implementação da nova heurística, a que chamaremos OctAML16, é simples. Cada iteração de seu laço principal é controlada por um par  $(r, t)$ , onde  $r$  (de rotação) assume valores  $r \in \{-1, 1\}$ , e  $t$  (de translação) assume valores  $t \in \{0, 1, \dots, 7\}$ , num total de 16 iterações. Na iteração referente a certo par  $(r, t)$ , será feita a tentativa de se obter um passeio aberto utilizando a heurística OctAML para a qual o octante relativo que

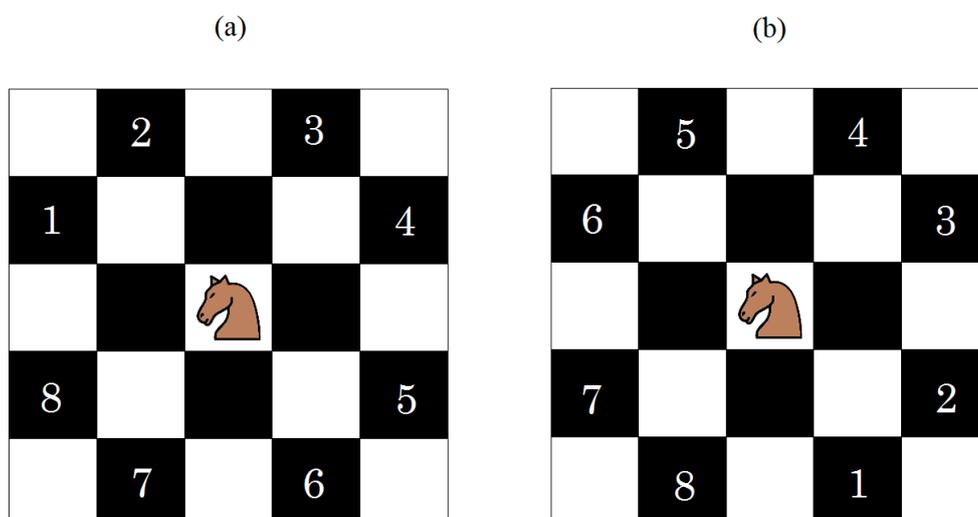


Figura 4. Permutações das prioridades: (a) casa inicial no primeiro octante; (b) casa inicial no sexto octante.

receberá prioridade 1 será o octante  $t$ , e o sentido de rotação da distribuição das prioridades fica definido pelo parâmetro  $r$ : 1 (respectivamente,  $-1$ ) indica que o sentido será horário (anti-horário) se o octante inicial for ímpar e anti-horário (horário) se o octante inicial for par, mantendo o respeito às simetrias do tabuleiro em cada execução.

Note que as 16 possíveis tentativas não são feitas para cada passo do cavalo, o que configuraria uma abordagem de *backtracking* e um tempo de execução exponencial, mas sim para *todo o passeio*, isto é, para uma iteração completa do laço principal. Uma vez definida a regra para aquela iteração, a regra será a mesma durante toda ela, a cada momento em que for necessário invocar o quarto critério. No pior caso, a heurística demandará 16 vezes mais tempo que a heurística AML, permanecendo ainda, portanto, linear no tamanho do tabuleiro. Na prática, observamos que em média menos do que duas iterações são necessárias, sendo portanto ínfima a degradação do desempenho. A Figura 5 ilustra a heurística proposta, em pseudo-código.<sup>4</sup>

#### 4. Resultados computacionais

Após a implementação das três variantes consideradas, passamos à definição e à consecução dos casos de teste.

**Primeiro teste: resultados da heurística AML.** Em (Álvarez-Martínez and Lázaro, 2012), afirma-se que a heurística AML consegue encontrar passeio aberto a partir de todas as casas iniciais possíveis para tabuleiros  $n \times n$ , para  $5 \leq n \leq 2000$ . Ocorre que a complexidade de se gerar passeios do cavalo a partir de todas as casas de um tabuleiro  $n \times n$  tem complexidade  $\Omega(n^4)$ , uma vez que, para cada  $n$ , há  $\Theta(n^2)$  casas iniciais possíveis, cada uma das quais exigindo esforço  $\Omega(n^2)$  em razão do tamanho de um passeio aberto. Para  $n = 1000$ , chegamos a uma ordem de grandeza de  $(1000)^4 = 10^{12}$ . Considerando todos os valores de  $n$  entre 5 e 2000, temos pelo menos 1000 vezes essa ordem de grandeza, ou  $10^{15}$  casas que em algum momento seriam acrescentadas a algum passeio. Um computador que opere a  $10^9$  ciclos de máquina por segundo jamais processaria mais do que  $10^8$

<sup>4</sup>O código completo, em linguagem C, pode ser encontrado em <https://www.dropbox.com/s/utvrnj9oesnu3b9/cavalo.c>.

**algoritmo:** OctAML16

**entrada:** um tabuleiro  $n \times n$  e uma casa inicial  $(x_0, y_0)$

**saída:** um passeio aberto do cavalo, ou a indicação de que não foi possível encontrá-lo

```
1  para  $r \in \{1, -1\}, t \in \{0, \dots, 7\}$  faça
2     $P \leftarrow \emptyset$ 
3     $casa\_atual \leftarrow (x_0, y_0)$ 
4    enquanto  $|P| < n^2$  faça
5       $P = P + casa\_atual$  // concatena casa_atual ao passeio corrente
6       $C \leftarrow \{(x, y) \mid (x, y) \text{ é atingível da casa atual e } (x, y) \notin P\}$ 
7      se  $|C| = 0$  então saia do laço // segue para a linha 21
8       $C \leftarrow \{(x, y) \in C \mid (x, y) \text{ é mínima pela regra de Warnsdorff}\}$ 
9      se  $|C| > 1$  então
10        $C \leftarrow \{(x, y) \in C \mid (x, y) \text{ tem distância mínima a um dos cantos}\}$ 
11     se  $|C| > 1$  então
12        $C \leftarrow \{(x, y) \in C \mid (x, y) \text{ tem distância mínima a uma das bordas}\}$ 
13     se  $|C| > 1$  então
14       para cada  $(x, y) \in C$  faça
15          $p[x, y] \leftarrow (oct\_rel(x, y) - oct\_abs(x_0, y_0) - r \cdot t) \bmod 8$ 
16       se  $r = -1$  então
17          $p[x, y] \leftarrow (8 - p[x, y]) \bmod 8$  // inverte a rotação
18          $p[x, y] \leftarrow p[x, y] + 1$  // prioridades em  $[1, 8]$ , por definição
19        $C \leftarrow \{(x, y) \in C \mid p[x, y] \text{ é mínimo}\}$ 
20      $casa\_atual \leftarrow$  elemento único de  $C$ 
21   se  $|P| = n^2$  então
22     retorne  $P$ 
23 retorne “passeio não encontrado”
```

---

**Figura 5. Heurística OctAML16 para o passeio aberto do cavalo em tabuleiros quadrados. As funções  $oct\_rel$  e  $oct\_abs$  retornam, respectivamente, os octantes relativos (à casa atual do cavalo) e absoluto da casa passada como parâmetro.**

casas por segundo (na expectativa extremamente otimista de se gastar apenas 10 ciclos de máquina por casa, quando o número real está certamente uma ou mais ordens de grandeza acima), e já temos aí um limite inferior da ordem de  $10^{15}/10^8 = 10^7$  segundos, ou 115 dias, para verificar experimentalmente aquela afirmação.<sup>5</sup> De todo modo, foi possível encontrar contra-exemplos rapidamente. Executando a heurística AML para todas as casas iniciais do segundo quadrante absoluto, obtivemos, em 56 dos 76 valores possíveis para  $n$  entre 5 e 80, pelo menos uma casa inicial para a qual a heurística falha. A Tabela 1 apresenta algumas dessas instâncias (no máximo uma falha por valor de  $n$  está sendo exibida). Resaltamos a existência de casos, não apresentados na Tabela 1, em que a heurística AML falha não apenas a partir de certa casa inicial considerada, mas também a partir de todas as casas iniciais que lhe são simétricas, e.g.  $n = 7$ , casas iniciais  $(0, 0)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(6, 6)$ .

---

<sup>5</sup> Acreditamos, por conseguinte, que os autores tenham se enganado quanto a haver testado para todas as casas iniciais, como também é possível que se tenham enganado com relação à Figura 7 apresentada em seu artigo, onde apresentam uma alegada solução para um tabuleiro  $113 \times 113$  a partir da casa inicial  $(98, 55)$ . Por ser ímpar o tamanho do tabuleiro, é impossível existir passeio aberto ou fechado a partir da casa inicial em questão, que possui cor preta.

**Tabela 1. Algumas instâncias de falha da heurística AML.**

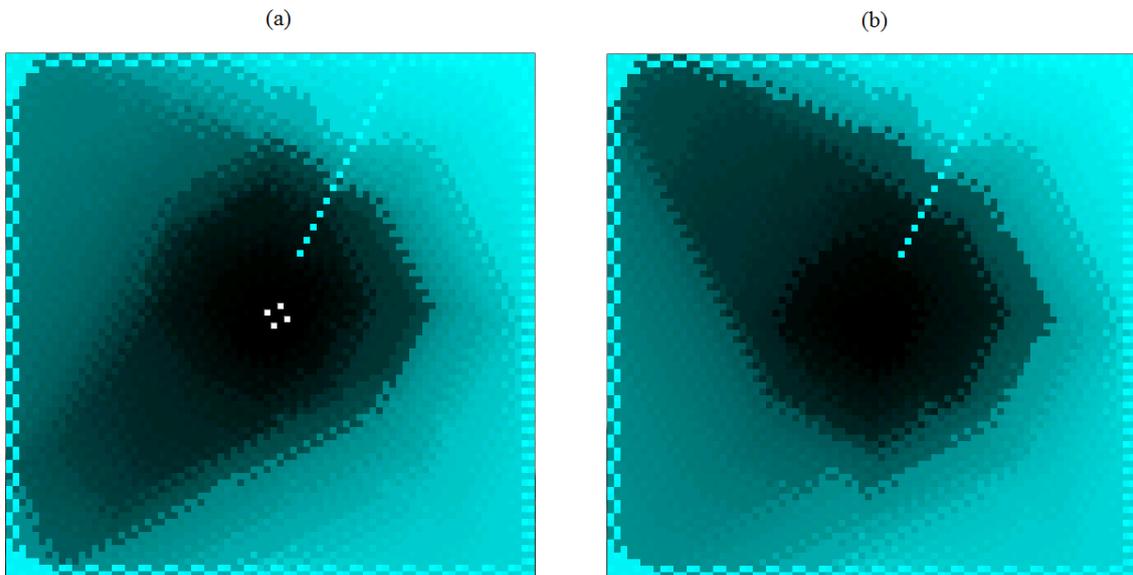
$n$	casa inicial	$n$	casa inicial	$n$	casa inicial
7	(4, 2)	43	(22, 8)	63	(32, 24)
18	(12, 2)	44	(25, 21)	64	(35, 30)
20	(11, 5)	45	(26, 6)	65	(36, 28)
22	(17, 7)	46	(27, 20)	66	(36, 9)
24	(14, 10)	47	(24, 2)	67	(40, 32)
26	(24, 4)	48	(26, 10)	68	(44, 31)
27	(23, 3)	50	(30, 20)	69	(36, 20)
28	(15, 1)	51	(26, 16)	70	(53, 19)
29	(20, 8)	52	(28, 17)	71	(47, 5)
32	(19, 5)	53	(39, 15)	72	(47, 3)
34	(33, 8)	54	(43, 19)	73	(40, 4)
35	(32, 8)	55	(33, 19)	74	(39, 12)
36	(29, 9)	56	(29, 19)	75	(45, 35)
37	(31, 7)	57	(33, 13)	76	(39, 34)
38	(32, 7)	58	(44, 8)	77	(52, 6)
39	(29, 1)	59	(54, 10)	78	(41, 38)
40	(21, 9)	60	(37, 11)	79	(40, 16)
41	(28, 0)	61	(43, 29)	80	(44, 30)
42	(23, 2)	62	(36, 27)		

**Tabela 2. Comparação entre heurísticas: a terceira coluna indica o total de instâncias testadas; as três colunas mais à direita indicam as quantidades de falhas de cada heurística.**

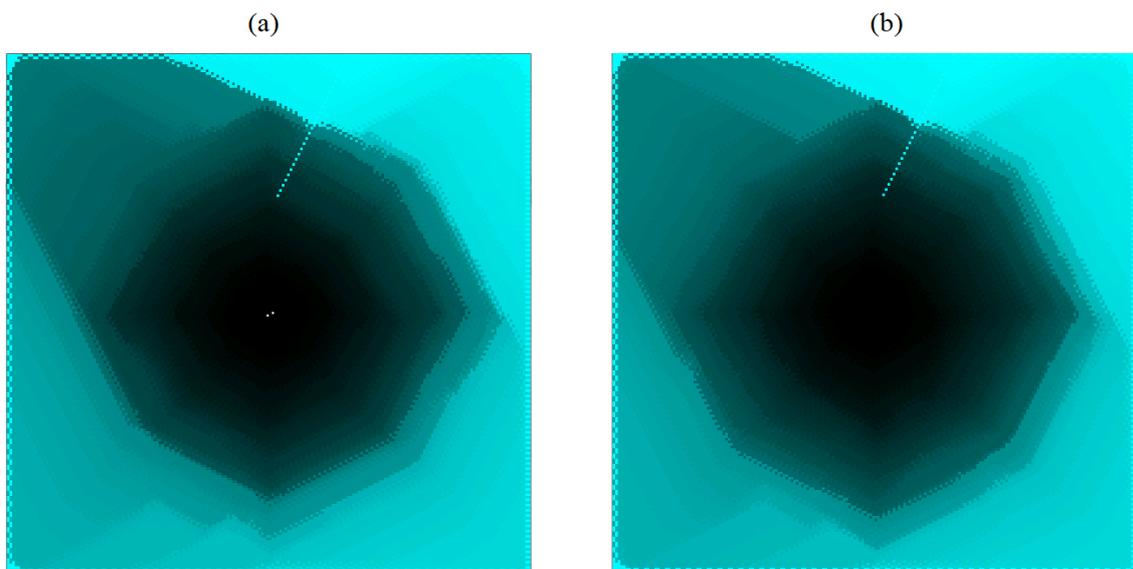
$n$	casa(s) inicial(is)	total	AML	OctAML	OctAML16
$5 \leq n \leq 80$	2º quad (s/ fronteira)	31597	227	219	0
$5 \leq n \leq 80$	2º quad (c/ fronteira)	32832	237	228	0
$5 \leq n \leq 5000$	(0,0)	4996	127	127	0

**Segundo teste: comparação das heurísticas AML, OctAML e OctAML16.** As três variantes foram executadas, primeiramente, para todos os tabuleiros  $n \times n$ ,  $5 \leq n \leq 80$ , a partir de cada uma das casas possíveis do segundo quadrante (tanto incluindo quanto não incluindo as casas da fronteira do segundo quadrante com o primeiro e terceiro quadrantes). A seguir, foram consideradas instâncias de tabuleiros  $n \times n$ ,  $5 \leq n \leq 5000$ , sempre a partir da casa inicial (0, 0). Os resultados obtidos estão na Tabela 2. As Figuras 6 e 7 ilustram dois casos para os quais a heurística AML falha e a heurística OctAML16 é bem sucedida.

**Terceiro teste: resultados da heurística OctAML16.** O terceiro experimento foi um teste exaustivo da nova heurística proposta. Ela foi executada em todos os tabuleiros  $n \times n$ , para  $5 \leq n \leq 430$ , a partir de todas as casas iniciais do primeiro octante, num total de 2548199 instâncias. Como a heurística é perfeitamente simétrica, foi desnecessário replicar os testes para os demais octantes. A heurística OctAML16 foi capaz de encontrar passeio aberto para todas as instâncias.



**Figura 6. Tabuleiro  $80 \times 80$ , casa inicial  $(44, 30)$ . As cores indicam a ordem de visita às casas. Quanto mais claro o tom, mais cedo foi feita a visita. Casas brancas indicam casas não-visitadas. (a) A heurística AML falha (note os quatro pontos brancos no centro da figura). (b) A heurística OctAML16 encontra um passeio aberto.**



**Figura 7. Tabuleiro  $200 \times 200$ , casa inicial  $(103, 54)$ , mesma convenção de cores. (a) A heurística AML falha (note os dois pequeninos pontos brancos no centro da figura). (b) A heurística OctAML16 encontra um passeio aberto.**

## 5. Conclusão

Neste trabalho, formulamos uma heurística para o problema do passeio aberto do cavalo, que resiste, há muitas décadas, a soluções exatas eficientes. Nossa heurística é a extensão do trabalho de diversos autores, com refinamentos simples que lograram produzir resultados absolutamente favoráveis. Acreditamos ser difícil provar que a heurística proposta funciona sempre. Em todo caso, os resultados obtidos reforçam a conjectura de que todos os tabuleiros  $n \times n$  admitem passeio aberto do cavalo.

Como trabalhos futuros, convém experimentar a nova heurística a tabuleiros irregulares e multidimensionais. Se os conceitos de quadrante e octante podem não ser tão facilmente generalizáveis, a idéia mais básica de aliar à regra de Warnsdorff a aplicação sucessiva de um número constante de permutações de prioridades — sem incorrer em aumento da complexidade assintótica — parece extensível a outras variantes do problema, assim como possivelmente ao problema do caminho hamiltoniano em grafos mais gerais.

## Referências

- Álvarez-Martínez, D. and Lázaro, R. A. R.** (2012). Algoritmo determinístico para resolver el problema del tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez  $n \times n$ . In *Pré-Anais do XVI Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa / Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.
- Cairns, G.** (2002). Pillow chess. *Mathematics Magazine*, 75:173–186.
- Cull, P. and DeCurtins, J.** (1978). Knight’s tour revisited. *Fibonacci Quarterly*, 16:276–285.
- Dudeney, H. E.** (1970). *Amusements in Mathematics*. Dover Publications.
- Erde, J., Golénia, B., and Golénia, S.** (2012). The closed knight tour problem in higher dimensions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19:P9.
- Euler, L.** (1759). Solution d’une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 15:310–337.
- Ganzfried, S.** (2004). A new algorithm for knight’s tour. Technical report, Oregon State REU Program.
- Kumar, A.** (2012). Magic knight’s tours in higher dimensions. *arXiv:1201.0458*.
- Parberry, I.** (1997). An efficient algorithm for the knight’s tour problem. *Discrete Applied Mathematics*, 73:251–260.
- Pohl, I.** (1967). A method for finding hamilton paths and knight’s tours. *Communications of the ACM*, 10:446–449.
- Roth** (1993). The problem of the knight: a fast and simple algorithm. Technical report, Max Planck Institut für Medizinische Forschung, Heidelberg, Germany, Math source item 0202-127.
- Schwenk, A. J.** (1991). Which rectangular chessboards have a knight’s tour? *Mathematics Magazine*, 64:325–332.
- Squirrel, D. and Cull, P.** (2006). A Warnsdorff-rule algorithm for knight’s tours on square chessboards. Technical report, Oregon State REU Program.
- Warnsdorff, H. C.** (1823). *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*. Schmalkalden.
- Watkins, J. J.** (1997). Knight’s tours on a torus. *Mathematics Magazine*, 70:175–184.