ISSN 0104-9739

Boletim

52

2008

BOLETIM GEPEM	RIO DE JANEIRO - RJ	Nº 52	P. 1 - 113	JANEIRO / JUNHO 2008

PUBLICAÇÃO DO GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

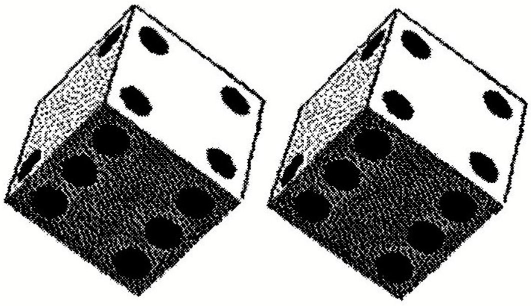
GEPEM

Sugestão para sua Aula

A Porta dos Desesperados
(ou o problema de Monty Hall)

Ilydio Pereira de Sá
Professor, UERJ, USS e Colégio Pedro II
ilydio@gmail.com.

Vinícius Gusmão Pereira de Sá
Doutor em Algoritmos e Combinatória pela COPPE-UFRJ
vigusmao@uol.com.br.



No número anterior do Boletim GEPEM propusemos o famoso "problema de Monty Hall". Trata-se de um programa de auditório onde há três portas iguais, uma das quais escondendo um prêmio. Você precisa escolher a porta com o prêmio ou nada ganha. Diz o problema que, após você ter escolhido uma porta e antes de ser revelado seu conteúdo, o apresentador abre, como de costume, uma das duas outras portas, mostrando-lhe que o prêmio não se encontra ali. Você é, então, perguntado se deseja trocar sua porta inicial por aquela que permanece fechada. A questão é se a troca da porta aumentaria, diminuiria ou em nada alteraria sua chance de ganhar o prêmio escondido.

Acertou quem respondeu que, mudando de porta, é maior a probabilidade de se ganhar o prêmio. Aliás, como veremos a seguir, um pouco de conhecimento de cálculo de probabilidades mostra que mudar de porta, nessa situação, nos dá uma probabilidade *duas vezes maior* de ganhar o prêmio (em relação a manter a escolha inicial).

É claro que, se existem três portas (vamos chamá-las *A, B e C*) e você escolhe uma delas às cegas (*A*, por exemplo), a probabilidade de que você tenha colocado as mãos no prêmio é de 1/3. Conseqüentemente, a chance de ter feito uma escolha inicial errada é igual a 2/3.

Entendido esse ponto, precisamos ter em mente que o apresentador do programa, ao abrir *propositalmente uma porta vazia* (digamos, B), está lhe dando uma valiosa informação: "se é o caso em que o prêmio está em uma das portas que você não escolheu (B ou C), saiba que ele está exatamente na porta que eu não quis – ou não pude – abrir (ou seja, C)."

Isso significa que, se você escolheu inicialmente uma das portas sem prêmio (e a chance disso ocorrer é de 2/3), irá necessariamente ganhar o prêmio ao trocar pela porta ainda não aberta. A chance de você ganhar não trocando de porta é, portanto, igual ao mesmo 1/3 inicial.

Uma maneira de se "intuir" a corretude desse resultado é: faça a brincadeira um número muito grande de vezes e nunca troque de porta após o apresentador lhe ter revelado uma porta vazia (coisa que ele *sempre* fará). Você terá localizado e ganhado o prêmio em aproximadamente um terço das vezes. Se tivesse trocado de porta sempre, teria ganhado o prêmio, evidentemente, em dois terços das vezes.

Ainda outra maneira "intuitiva" é imaginar que há 1000 portas numeradas na brincadeira, apenas uma contendo um prêmio. Você escolhe uma delas, após o que o apresentador revela 998 portas vazias, perguntando-lhe se deseja manter sua porta inicial ou trocar por aquela, de número 355, que ele manteve fechada. Convenhamos...

No entanto, a maioria das pessoas tende a pensar que tanto faz ficar com a porta inicial ou mudar para a outra, com 50% de chance para cada uma. Isto revela uma avaliação incorreta da informação que vem à tona com a interferência do apresentador *que só pode escolher uma porta vazia para abrir* (sem estragar a brincadeira). A informação adquirida não é simplesmente "a porta B não tem prêmio"; é, na verdade, "o apresentador *não abriu* a porta C".

Esse problema – também conhecido como "paradoxo", apenas por sua aparente contra-intuitividade – é usado em diversos cursos e livros de estatística e probabilidade e tem circulado pelos meios acadêmicos e pela Internet. A solução que apresentamos é bem simples e busca tentar corrigir a intuição do leitor que eventualmente tivesse respondido equivocadamente. O problema pode, no entanto, ser resolvido formalmente através de probabilidades condicionais. Sejam os seguintes eventos:

P_A: o prêmio está em A
P_B: o prêmio está em B
P_C: o prêmio está em C
R_A : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de A

R_B : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de B
R_C : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de C

Se mantivermos o rótulo A para a porta que você escolhe inicialmente e B para a porta vazia aberta pelo apresentador, estamos interessados em $\mathbf{Pr}[P_A \mid R_B]$.

Pela "Regra de Bayes", temos

$$\mathbf{Pr}[P_A \mid R_B] = \{\mathbf{Pr}[R_B \mid P_A].\mathbf{Pr}[P_A]\}/$$
$$\{\mathbf{Pr}[R_B \mid P_A].\mathbf{Pr}[P_A] + \mathbf{Pr}[R_B \mid P_B].\mathbf{Pr}[P_B] + \mathbf{Pr}[R_B \mid P_C].\mathbf{Pr}[P_C]\} =$$
$$= \{(1/2).(1/3)\}/$$
$$\{(1/2).(1/3) + 0.(1/3) + 1.(1/3)\} =$$
$$= 1/3.$$

Como $\mathbf{Pr}[P_A \mid R_B] + \mathbf{Pr}[P_B \mid R_B] + \mathbf{Pr}[P_C \mid R_B] = 1$ e $\mathbf{Pr}[P_B \mid R_B] = 0$, concluímos facilmente que

$$\mathbf{Pr}[P_C \mid R_B] = 1 - \mathbf{Pr}[P_A \mid R_B] = 1 - 1/3 = 2/3.$$

Já que nos valemos de sua famosa expressão, fechamos este artigo lembrando que o reverendo Thomaz Bayes foi um dos primeiros a escrever sobre o pensamento matemático na tomada de decisões. Em estudo publicado em 1763, lembra-nos que um dos principais componentes do processo decisório é interpretar corretamente as informações disponíveis e lidar com as incertezas, determinando as probabilidades associadas aos possíveis desfechos a partir de uma ou outra decisão tomada.

O bom uso das probabilidades condicionais é, portanto, uma ferramenta essencial em nossas vidas – e ainda que de forma intuitiva, não necessariamente calculada em números exatos. Neste momento, por exemplo, o leitor ficaria muito surpreso se passasse diante de si uma pessoa vestida de caveira ou de Hércules. No entanto, se ouvisse ao fundo uma música de Carnaval, a probabilidade de que visse alguém fantasiado dessa forma seria muito maior.

Bibliografia

CARMEN KAWANO (Brasil). **Os números do acaso**: Teoria da probabilidade criada no século 18 pelo reverendo Bayes ainda gera controvérsia. Revista Galileu on line - Ed. 153 - abril de 2004. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu>. Acesso em: 20/05/2005