

2ª Lista de Matemática Combinatória

Prof. Vinícius

1) Sobre a potência $(3x^2 - x)^{15}$, determine:

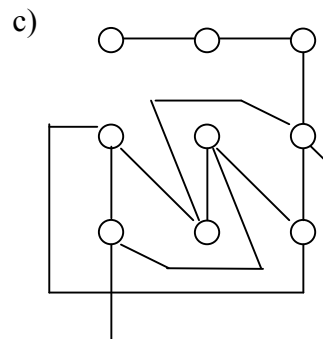
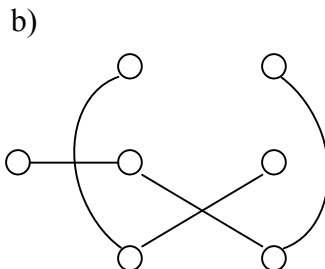
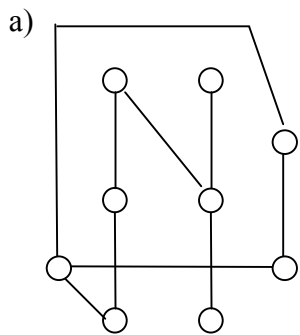
- o polinômio resultante, na forma de um somatório;
- o coeficiente do termo de 16º grau;
- a soma de todos os coeficientes.

2) Prove, por qualquer método, que

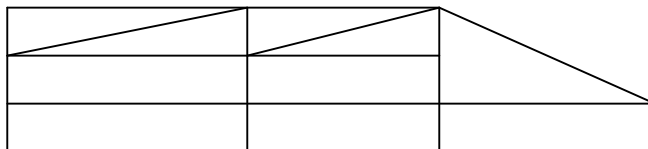
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

3) Para cada um dos grafos a seguir, responda:

- se é cíclico ou acíclico;
- se é conexo ou desconexo;
- se é planar ou não-planar;
- qual seu grau máximo.



4) A figura a seguir representa os cortes que deverão ser feitos em uma placa de metal por uma máquina dotada de uma lâmina e de um braço mecânico que a movimentam.



Para poupar tempo e energia, deseja-se minimizar o movimento do braço da máquina. Pergunta-se:

a) É possível realizar todos os cortes desejados e retornar a lâmina ao ponto de partida, de tal forma que ela apenas seja deslocada enquanto está efetivamente cortando a placa?

b) Considere o grafo $G=(V,E)$ associado à figura, onde os vértices são os pontos de interseção de duas linhas, e as arestas são os segmentos de reta unindo dois vértices. Qual o menor tamanho de um conjunto de arestas E' que é suficiente para que os cortes associados ao grafo $G'=(V, E \cup E')$ possam ser realizados continuamente pela máquina (isto é, apenas deslocando a lâmina enquanto ela de fato corta)?

c) *Quantos* são os conjuntos de arestas de tamanho mínimo que satisfazem a condição do item b)?

5) Dê uma relação de recorrência para encontrar o número de seqüências binárias de n bits nas quais não há qualquer par de 0's consecutivos, não esquecendo da(s) condição(ões) inicial(is) que for(em) necessária(s). [Obs.: Não é preciso resolver a recorrência!]

6) Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função que resolve a relação de recorrência da questão anterior, ou seja, $f(n)$ é a fórmula fechada para o número de seqüências binárias de n bits nas quais não há qualquer par de 0's consecutivos. Dê uma relação de recorrência para encontrar o número de seqüências binárias de n bits nas quais há *exatamente um* par de 0's consecutivos. [Dica: a função f pode ser útil; é permitido que ela apareça em sua relação de recorrência.] Não se esqueça da(s) condição(ões) inicial(is) que for(em) necessária(s).

7) Encontre uma fórmula fechada para a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2}, \text{ sendo } a_1 = 7, a_2 = 27;$$